

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

CLASA A IX A

1.

a) Să se demonstreze că $n+1 \leq \sqrt{n(n+3)} < n+2, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

b) Să se calculeze suma

$S = \left[\sqrt{2 \cdot 5} \right] + \left[\sqrt{3 \cdot 6} \right] + \dots + \left[\sqrt{2010 \cdot 2013} \right]$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x .

2. Considerăm patrulaterul convex ABCD și punctele $M \in (AB), N \in (CD)$ respectiv $P \in (AC)$ astfel încât $\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} = \vec{0}, \overrightarrow{DN} + 3\overrightarrow{CN} = \vec{0}$ și $\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

Demonstrați că dacă $(BC) \parallel (AD)$, atunci

a) $(MP) \parallel (BC)$;

b) Punctele M, N, P sunt coliniare;

c) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{BC})$

3. Lui Doru i-au venit în vizită colegii de clasă. Mama lui l-a întrebat câți oaspeți au venit. Doru a răspuns: "Mai mulți decât șase", dar sora sa de alături a spus: "Mai mulți decât cinci".

Câți colegi i-au venit în vizită lui Doru, dacă se știe că un răspuns este corect și altul nu ?

4. Să se împrejmuiească un loc în formă de dreptunghi cu un gard lung de 120m. Cât trebuie să fie laturile acestui dreptunghi astfel încât aria locului să fie maximă ?

Notă: Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

CLASA A X A

1. Se dă suma $S_n = 1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + 3! \cdot 3 + \dots + n! \cdot n, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că $n! \cdot n = (n+1)! - n!, \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

b) Calculați S_n .

2. Un elev a început să citească o carte pe 1 mai. În fiecare zi el a citit același număr de pagini și a terminat de citit cartea pe 31 mai. Dacă în prima zi el ar fi citit de patru ori mai puține pagini și apoi în fiecare zi următoare câte o pagină mai mult decât în ziua precedentă, elevul ar fi terminat de citit cartea tot la data de 31 mai. Câte pagini are cartea?

3. Se dau mulțimile:

$$A = \{(a, a, a) / a \in \mathbb{Z}\};$$

$$B = \{(a, b, c) / a + 2b - 3c = 0, a, b, c \in \mathbb{Z}\};$$

$$C = \{(a, b, c) / a + 3b - 4c = 0, a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$$

Demonstrați că $A = B \cap C$.

Obs. Două mulțimi X și Y sunt egale dacă și numai dacă $X \subseteq Y$ și $Y \subseteq X$.

4. Demonstrați că expresia dată mai jos nu depinde de x :

$$E = \frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} - \frac{n-1}{n} \cdot \log_2^2 x, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, x > 0, x \neq 1.$$

Notă: Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

CLASA A XI A

1. Prețul unui obiect s-a ieftinit cu 75% și apoi noul preț s-a scumpit de două ori consecutiv cu același procent $p\%$, după care obiectul a ajuns la același preț ca la început. Aflați cu ce procent a avut majorarea de preț.

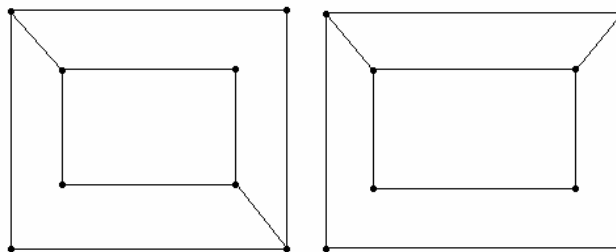
2. La olimpiada de matematică elevii unei școli au obținut următoarele rezultate grupate în tabelul de mai jos:

Punctaj (x_i)	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100)
Frecvența (n_i)	16	26	35	47	24	13

- a) Să se completeze tabelul cu frecvențele absolute cumulate crescător;
- b) Să se calculeze valoarea medie a seriei statistice;
- c) Să se calculeze mediana și să se compare cu valoarea medie.

3.

- a) Să se studieze dacă grafurile din imagine sunt izomorfe.



- b) Fie G un graf cu n vârfuri ($n \geq 3$) și m muchii astfel încât $m > C_{n-1}^2$. Să se arate că G nu are vârfuri izolate.

4.

- a) Desenați un graf regulat de ordin 3 cu 8 noduri;
- b) Demonstrați că numărul de noduri ale unui graf regulat de ordin 3 este par.

Notă: Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

CLASA A XII A

1. În $M_3(\mathbf{R})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Demonstrați că $A^3 = O_3$ și $\det(I_3 + A) \cdot \det(I_3 - A + A^2) = 1$.

b) Calculați $2A + 3A^2 + 4A^3 + \dots + 2011A^{2010}$.

c) Calculați $(I_3 + A)^n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

2. Pe mulțimea \mathbf{R} se definește legea $x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.

a) Demonstrați că (\mathbf{R}, \circ) este grup comutativ.

b) Determinați $x, y \in \mathbf{R}$ astfel încât
$$\begin{cases} x \circ y \circ (-2) = 1 \\ x^3 - y^3 = -7 \end{cases}$$
.

3. Dacă tatăl ar avea cu 7 ani mai mult decât are, atunci vârsta actuală a fiului mai mic ar fi $\frac{1}{6}$ din vârsta tatălui. Peste 15 ani vârsta fiului mai mare va fi $\frac{1}{2}$ din vârsta tatălui. Să se determine vârsta fiecăruia, dacă peste 18 ani suma vârstelor celor doi copii va fi egală cu vârsta tatălui.

4. Pentru golirea unui bazin cu apă se utilizează trei robinete. Timpul de funcționare a fiecărui robinet și cantitatea de apă evacuată exprimată în hectolitri sunt în tabelul de mai jos. Să se determine debitul în hl / oră a fiecărui robinet.

Robinetul 1 (nr. ore)	Robinetul 2 (nr. ore)	Robinetul 3 (nr. ore)	Cantitatea de apă evacuată (hl)
2 ore	3 ore	6 ore	220 hl
3 ore	2 ore	6 ore	210 hl
2 ore	2 ore	3 ore	145 hl

Notă: Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.